Κεφάλαιο 7

Ενίσχυση των μαθηματικών δεξιοτήτων και σκέψης

Αντωνία Πατσιοδήμου & Γεωργία Γεωργαλά

Η διδασκαλία των μαθηματικών για τους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες (ΜΔ) στηρίζεται στην αξιοποίηση των περισσότερων στοιχείων των «νέων μαθηματικών», όπως η σύνδεση των μαθηματικών με καταστάσεις της καθημερινής ζωής, η έμφαση στην επίλυση προβλημάτων, η χρήση της προηγούμενης γνώσης στην οικοδόμηση της νέας γνώσης, η εξοικείωση των μαθητών με ποικιλία αναπαραστάσεων μαθηματικών εννοιών και πράξεων, η διδασκαλία στρατηγικών μάθησης, η «μοντελοποίηση» διαδικασιών, η καλλιέργεια μεταγνωστικών δεξιοτήτων και η υλοποίηση ομαδικοσυνεργατικών δραστηριοτήτων (Fuchs & Fuchs, 2005˙ Gersten, Jordan, & Flojo, 2005˙ Hanley, 2005˙ Miller & Mercer, 1997˙ Montague, 2007˙ Rivera, 1998).

Παρά το γεγονός ότι η νέα προσέγγιση των μαθηματικών είναι περισσότερο φιλική στην προσαρμογή της διδασκαλίας στις διαφορετικές εκπαιδευτικές ανάγκες των μαθητών από ότι η παραδοσιακή, εξακολουθεί να υπάρχει ανάγκη για προσαρμογές, τόσο στη διάρθρωση της ύλης όσο και στην υλοποίηση των διδακτικών δραστηριοτήτων, προκειμένου η διδασκαλία να είναι αποτελεσματική για τους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες. Αν και η σπειροειδής διάταξη της ύλης φαίνεται να εξυπηρετεί τους μαθητές με φτωχές μαθηματικές δεξιότητες, αφού συνήθως τους επιτρέπει να καλλιεργήσουν τις ίδιες δεξιότητες πολλές φορές και ολοένα σε υψηλότερο επίπεδο, δεν κρίνεται η καταλληλότερη για τους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες (Miller & Mercer, 1997). Χαρακτηριστικό αυτής της διάταξης είναι η σύντομη εισαγωγή μεγάλου αριθμού δεξιοτήτων στη διδασκαλία, οι οποίες επανεισάγονται σε επόμενα στάδια σε ολοένα πιο «βαθιά» επεξεργασία. Οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες προκειμένου να κατακτήσουν μια δεξιότητα (σε διάφορα γνωστικά αντικείμενα) συνήθως χρειάζονται περισσότερο διδακτικό χρόνο, τόσο στην εισαγωγή της κατά τη σύνδεση της με προηγούμενες γνωστικές τους δομές, όσο και κατά την ανάλυσή της σε επιμέρους βήματα / στάδια (ανάλυση έργου), καθώς και στην εμπέδωσή της και εξάσκηση. Κατά συνέπεια, η διάταξη της ύλης που λειτουργεί αποτελεσματικά για τους τυπικούς μαθητές, μπορεί να μην επιτρέψει στους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες να δουλέψουν πράγματι σε βάθος και αντίθετα να τους δεσμεύσει σε επιφανειακή κάλυψη μεγάλου εύρους δεξιοτήτων και γνώσεων.

Όσον αφορά στις δραστηριότητες με τη χρήση αντικειμένων, αυτές διευκολύνουν πολύ τη μαθησιακή διαδικασία αυτής της μερίδας των μαθητών, οι οποίοι έχουν ανάγκη από συσχετισμό αντικειμένων ή πράξεων πάνω στη φυσική πραγματικότητα προκειμένου να προχωρήσουν σε αφηρημένες νοητικές αναπαραστάσεις και στη χρήση συμβόλων και για αυτό προτείνονται και στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Bley, & Thorton, 1995˙ Mastropieri, Scruggs, & Chung, 1998). Παρόλα αυτά ο τρόπος λειτουργίας αυτών των δραστηριοτήτων ενδέχεται να είναι διαφορετικός από εκείνον των τυπικών συμμαθητών τους. Οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες επωφελούνται στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών όχι από την καθ' εαυτή ενασχόληση τους με τα αντικείμενα, αλλά από τη *σαφή και συγκεκριμένη διδασκαλία από την εκπαιδευτικό που προσδιορίζει επακριβώς τη σχέση των αντικειμένων και των πράξεων με συμβολικές διαδικασίες* (Carnine, 1998). Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να λαμβάνουν υπόψη πως στην ανακαλυπτική μέθοδο οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες συχνά δυσκολεύονται να παρατηρήσουν σχέσεις και να τις γενικεύσουν και πρέπει να παρέχουν σε αυτούς ειδική λεκτική επεξήγηση κατά τις δραστηριότητες, καθώς και να τις ενσωματώσουν στο κατάλληλο σημείο της διδασκαλίας ανάλογα με τις απαιτήσεις λογικομαθηματικού συλλογισμού στις οποίες βασίζονται.

Διδακτικές παρεμβάσεις σε μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες στα μαθηματικά

«Το 8 είναι μεγαλύτερο του 5, αλλά δε ξέρω πόσο ακριβώς….
Μάλλον όπως και το 7 είναι μεγαλύτερο του 6.»
Κατερίνα, 8 ετών

Μερικοί από τους βασικότερους σκοπούς των παρεμβάσεων στους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες στα μαθηματικά είναι η παροχή εκπαιδευτικής στήριξης κατά τη συγκρότηση της έννοιας του αριθμού, την αυτοματοποίηση των βασικών αριθμητικών δεδομένων (ευχερή ανάκληση των αποτελεσμάτων των πράξεων με δυο μονοψήφιους αριθμούς) και της χρήσης βασικών υπολογιστικών στρατηγικών (Gersten, Jordan, & Flojo, 2005).

Έννοια του αριθμού

Αν και δεν υπάρχει συμφωνία μεταξύ των ερευνητών για τον ορισμό της **έννοιας του αριθμού**, καθώς έχουν καταγραφεί τουλάχιστον τριάντα διαφορετικά συστατικά στοιχεία της (Berch, 2005), σύμφωνα με τη λειτουργική προσέγγιση της έννοιας τα βασικότερα χαρακτηριστικά της αφορούν (Kalchman, Moss, & Cass, 2001):

α. στην ευχέρεια της άμεσης εκτίμησης ποσοτήτων
β. στην ικανότητα αναγνώρισης παράλογων αποτελεσμάτων (πχ. 7-4=8)
γ. στην ευελιξία των νοερών υπολογισμών
δ. στην ικανότητα μετακίνησης μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων και χρήσης της καταλληλότερης από αυτές.

Αν και η κατάκτηση της έννοιας του αριθμού δε μπορεί να δομηθεί εύκολα μέσα από μια ορισμένη σειρά μαθημάτων ή να είναι ίδια σε όλους τους μαθητές ανεξάρτητα από τα γνωστικά τους χαρακτηριστικά και την τυχόν συνύπαρξη δυσκολιών στη γλώσσα, υπάρχουν κάποια κοινά στοιχεία που λειτούργησαν θετικά σε ερευνητικές εκπαιδευτικές παρεμβάσεις. Το σημαντικότερο από αυτά είναι η χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων της πληροφορίας (ομάδες αντικειμένων, μοτίβα με βούλες όπως αυτά των ζαριών, σημεία σε μια γραμμή ή σε μια κλίμακα) και ιδιαίτερα η χρήση της **αριθμογραμμής** και σε *οριζόντιο άξονα* όπου το «μακρινότερο» συνδέεται με το «μεγαλύτερο/περισσότερο», και σε *κάθετο άξονα* όπως το θερμόμετρο, κατά την οποία το «μεγαλύτερο» συνδέεται με το «ψηλότερο» και το «μικρότερο» με το «χαμηλότερο». Η χρήση των αριθμογραμμών βοηθά στην κατασκευή μιας νοητής αριθμογραμμής πάνω στην οποία ο μαθητής μπορεί να κινείται με άνεση, ώστε να απαντά με επιτυχία στα περισσότερα προβλήματα σύγκρισης αριθμών, καθώς και να επιλύει τα προβλήματα της πρόσθεσης και αφαίρεσης που αναφέρονται στην πρώτη τάξη του δημοτικού.

Δραστηριότητες που διευκολύνουν τους μαθητές στη συγκρότηση της έννοιας του αριθμού και που μάλιστα πραγματοποιούνται εύκολα και σε μεγάλες ομάδες μαθητών, είναι (Bley & Thorton, 1995˙ Gesten & Chard, 1999):

α. η μέτρηση αντικειμένων που παρουσιάζονται οπτικά, αντικειμένων που χειρίζονται απτικά (πχ. κρίκων που περνιούνται σε σταθερή βάση) και αντικειμένων (πχ. κερμάτων) που ακούγονται να πέφτουν σε ένα αδιαφανές κουτί και χτυπημάτων χεριών (παλαμάκια) *με ταυτόχρονη εκφορά των λέξεων – αριθμών ώστε να γίνεται η αντιστοίχηση ένα προς ένα με τα αντικείμενα.*

β. η εξάσκηση στην απαρίθμηση και στην απαρίθμηση προς τα πίσω (πχ. από το 10 ως το 0).

γ. η λεκτική / εννοιολογική σύνδεση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μέσα από το χειρισμό αντικειμένων, η οποία «μοντελοποιείται» από την εκπαιδευτικό και εκφράζεται προφορικά από το μαθητή κατά την επίλυση προβλημάτων.

Βασικά Αριθμητικά Δεδομένα

Όσον αφορά στην αυτοματοποίηση των βασικών αριθμητικών δεδομένων (Β.Α.Δ.), δηλαδή η μετατροπή της διαδικαστικής γνώσης τους σε δηλωτική, κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική ως διδακτικός στόχος, γιατί εκτός από την «οικονομία» νοητικών δυνάμεων που προσφέρει κατά την επεξεργασία σύνθετων προβλημάτων ή αλγόριθμων, επιτρέπει την καλύτερη κατανόηση μαθηματικών συλλογισμών που παρουσιάζονται από την εκπαιδευτικό ή τους συμμαθητές, κατά τους οποίους η γνώση των Β.Α.Δ. θεωρείται δεδομένη (Gersten & Chard, 1999).

Κατά τη διδασκαλία των Β.Α.Δ. είναι ιδιαίτερα ωφέλιμη η χρήση παραδειγμάτων από το άμεσο περιβάλλον του μαθητή ή μνημονικών βοηθημάτων που σχετίζονται με τα **βιώματά** του, όπως η σύνδεση του 2+2 με τα πόδια ενός τετράποδου που έχει ή αγαπά ο μαθητής, το 3+3 με μια συσκευασμένη εξάδα αβγών, το 4+4 με τα πόδια της αράχνης, το 5+5 με τα δάχτυλα, το 6+6 με μια ντουζίνα φλιτζανιών.

Γενικά, η γνώση και η άμεση ανάκληση των Β.Α.Δ. δεν πρέπει να γίνεται μέσα από μηχανιστική και στείρα επανάληψη ερωτήσεων, αλλά μέσα από τη διαχείριση καταστάσεων με νόημα, εφόσον όταν έχει κάτι σημασία ανακαλείται και πιο εύκολα (Robinson, Menchetti, & Torgesen, 2002).

Βασικές υπολογιστικές στρατηγικές

Είναι αναγκαίο να δίνεται έμφαση στη χρήση **βασικών υπολογιστικών στρατηγικών**, η οποία διευκολύνει τους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες στη γρήγορη και σωστή εύρεση των αποτελεσμάτων που σταδιακά θα αυτοματοποιήσουν (Gersten και συν., 2005) όπως:

α. η εύρεση αθροίσματος με συνέχιση της απαρίθμησης από τον μεγαλύτερο προσθετέο (πχ. ο μαθητής για να βρει το άθροισμα 4+2, απαριθμεί μετά το 4).
β. η εύρεση αθροίσματος με ανάλυση ενός αριθμού σε γνωστό άθροισμα που έχει ήδη αυτοματοποιηθεί (πχ. στην εύρεση του αθροίσματος 5+8, το 8 αναλύεται 5+3 για τη συμπλήρωση της δεκάδας 5+8= 5+5+3).
γ. η ανάλυση ενός αριθμού σε ν+1 μορφή για αξιοποίηση ενός ήδη αυτοματοποιημένου Β.Α.Δ (πχ. στην εύρεση του αθροίσματος 6+7, αν έχει ήδη αυτοματοποιηθεί το 6+6 = 12, γίνεται η ανάλυση 6+7=6+6+1=13).
δ. η χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας σε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό,
ε. η αντίστροφη σχέση των πράξεων (πχ. αφού 7+3=10, τότε και 10-3=7, καθώς και 10-7=3).

Οι στρατηγικές θα πρέπει να παρουσιάζονται και να δουλεύονται **σε περιστάσεις με νόημα** και όχι ως βήματα μιας διαδικασίας που είναι αποκομμένη από την καθημερινή ζωή.

Στη διδασκαλία των Β.Α.Δ. η **εξάσκηση** είναι πάρα πολύ σημαντικό κομμάτι της αυτοματοποίησής τους και μπορεί να επιτευχθεί μέσα από δραστηριότητες με κάρτες (Bley & Thorton, 1995) είτε διπλής όψης είτε ομαδοποίησης «οικογενειών» Β.Α.Δ (πχ. 4x6, 6x4, 24:6, 24:4), επιτραπέζια παιχνίδια (Αγαλιώτης, 2000˙ Griffin, 2004) και ηλεκτρονικό λογισμικό. *Το κρίσιμο στοιχείο αυτών των δραστηριοτήτων είναι η ενθάρρυνση και ο σαφής προσανατολισμός του μαθητή στην ανάκληση και όχι στον υπολογισμό της πράξης που του δίνεται.*

Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι στη διδασκαλία των μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες δεν πρέπει στο ίδιο μάθημα ο μαθητής να δουλεύει ταυτόχρονα και στην εκμάθηση των Β.Α.Δ. και στην εκμάθηση της εκτέλεσης του αλγόριθμου μιας πράξης. Ο μαθητής πρέπει να εργάζεται στην εκτέλεση πράξεων χρησιμοποιώντας Β.Α.Δ. που γνωρίζει καλά (Αγαλιώτης, 2000), ώστε η προσπάθειά του να επικεντρώνεται στην κατάκτηση ενός μόνο διδακτικού στόχου κάθε φορά.

Η διδασκαλία των αριθμητικών πράξεων

Κατά τη διδασκαλία των αριθμητικών πράξεων στους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες, πριν γίνει η εισαγωγή στη διαδικασία του αλγόριθμου είναι απαραίτητο οι μαθητές να είναι πλήρως εξοικειωμένοι με τα σύμβολα των πράξεων (+, -, x, :) και να έχουν κατακτήσει την ανάλογη μαθηματική γλώσσα τόσο στην κατανόηση όσο και στην έκφραση (Bley & Thorton, 1995). Δηλαδή, οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις ονομασίες των πραξιακών συμβόλων, να τα συνδέουν με τη σωστή πράξη, να τα συσχετίζουν σωστά με τα ρήματα που αναφέρονται στα προβλήματα (πχ. αφαιρώ, βγάζω, παίρνω, μειώνω κτλ.). Επίσης, καλό είναι να γνωρίζουν τις ειδικές ονομασίες των αποτελεσμάτων (πχ. άθροισμα, διαφορά) και των αριθμών που αναφέρονται στην πράξη (πχ. μειωτέος, αφαιρετέος).

Εκτός από την κατανόηση της σημασίας των αριθμητικών πράξεων σε περιστάσεις της καθημερινής ζωής και μάλιστα σε όλες τις δυνατές μορφές (πχ. η πρόσθεση ως κατάσταση σύνθεσης, μεταβολής και σύγκρισης μεγεθών και των πιθανών συνδυασμών τους) είναι σημαντικό *να συνδέεται η συμβολική μορφή της πράξης με ενέργειες πάνω σε αντικείμενα* (Αγαλιώτης, 2000). Ειδικά για τη χρήση των «κρατούμενων» στην πρόσθεση και των «δανεικών» στην αφαίρεση – καθώς και γενικά για την κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων – είναι αναγκαίο ο μαθητής να λύνει προβλήματα χρησιμοποιώντας αντικείμενα (πχ. μάρκες, ξυλάκια) για να καταφέρει να συσχετίσει τις ενέργειές του πάνω στη φυσική πραγματικότητα με τις αφηρημένες νοητικές αναπαραστάσεις των αριθμητικών πράξεων.

Σε ό,τι αφορά στην αφαίρεση, αν και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα παρουσιάζονται και οι δύο αλγόριθμοι «της πρόσθεσης των ίσων ποσοτήτων» και της «αναδόμησης του μειωτέου», μάλλον προβάλλεται περισσότερο ο πρώτος. **Οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες πιθανά να δυσκολευτούν αν οι δύο τεχνικές παρουσιαστούν πολύ κοντά η μια στην άλλη, χωρίς προηγουμένως να έχουν κατακτήσει τη μία από αυτές.** Επίσης, για τους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες, η κατανόηση της «αναδόμησης του μειωτέου» κρίνεται ως ευκολότερη, καθώς «η λεκτική επένδυση της μεθόδου ανταποκρίνεται στις πραγματικές υλικές ενέργειες και μπορεί εύκολα να αναπαρασταθεί πραξιακά, ιδιαίτερα στο επίπεδο της αφαίρεσης που στοχεύει στην εύρεση υπολοίπου» (Αγαλιώτης, 2000, σελ. 288).

Τέλος, οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες στα μαθηματικά που αντιμετωπίζουν μνημονικά προβλήματα και δυσκολεύονται τόσο στην εκμάθηση των Β.Α.Δ. όσο και στην αυστηρή ακολουθία των βημάτων ενός αλγόριθμου, μπορούν να διδαχθούν εναλλακτικούς αλγόριθμους των αριθμητικών πράξεων, οι οποίοι είναι λιγότερο σύνθετοι από τους τυπικούς και που συνήθως δίνουν έμφαση στην ανάλυση αριθμών και στην εύρεση μερικών συνόλων (McCoy & Prehm, 1987). Με αυτόν τον τρόπο, διευκολύνονται στην υπέρβαση των μνημονικών δυσκολιών που αντιμετωπίζουν και εκτός από τη χρήση υπολογιστή τσέπης κατακτούν μια μέθοδο με την οποία μπορούν να χειρίζονται μεγάλους αριθμούς και να υπολογιστούν σωστά με μεγαλύτερη ταχύτητα και αυξημένη ακρίβεια.

Μετάβαση από τη διδασκαλία της Αριθμητικής στη διδασκαλία της Άλγεβρας και Γεωμετρίας σε μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες στα μαθηματικά

Οι δυσκολίες με τη χρήση συμβόλων συνήθως υπογραμμίζονται όταν η εκπαιδευτικός περνά από την αριθμητική στην διδασκαλία της άλγεβρας (Witzel, Smith, & Browuell, 2004). Άλλωστε, τα περισσότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες στα μαθηματικά αφορούν στη μετάβασή τους από την εφαρμογή απλών στρατηγικών αριθμητικών υπολογισμών σε πιο σύνθετες στρατηγικές (Παντελιάδου & Πατσιοδήμου, στο Παντελιάδου & Μπότσας, 2007). Ιδιαίτερα, αντιμετωπίζουν προβλήματα με την άλγεβρα λόγω της απειρότητας και της διαδοχικής φύσης των μαθηματικών, η οποία αναγκάζει τους μαθητές να συνδυάζουν πολλές γνωστικές ενότητες για την ολοκλήρωση μιας και μόνο εργασίας (Winfree, 2006). Παράλληλα η εισαγωγή στη γεωμετρία, απαιτεί από τους μαθητές να εφαρμόσουν τις απαραίτητες τεχνικές, να χρησιμοποιήσουν τους κατάλληλους τύπους και τα κατάλληλα εργαλεία για τις διάφορες μετρήσεις (Cass, Cates, Smith, & Jackson, 2003).

Χρήση αντικειμένων

Οι έρευνες υποστηρίζουν τη χρήση αντικειμένων και εικονικών αναπαραστάσεων για τη διδασκαλία μιας ποικιλίας μαθηματικών θεμάτων, ιδιαίτερα στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία (Butler, Miller, Creham, Babbit, & Pierce, 2003˙ Gagnon, & Maccini, 2007˙ Dolan, Murray, & Strangman, 2006˙ Maccini, Gagnon, Mulcah, & Leon, 2006˙ Rivera, 2004˙ Winfree, 2006). Η **χρήση αντικειμένων**, φυσικά με τις απαραίτητες κατευθύνσεις από την εκπαιδευτικό και με σταδιακή εικονική και αφηρημένη αναπαράσταση, βοηθά τους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες στην κατανόηση γεωμετρικών και αλγεβρικών εννοιών, αλλά και την ανάπτυξη δεξιοτήτων γενίκευσης. Τέτοια αντικείμενα είναι οι **γεωπίνακες, οι πίνακες με μαγνητικά σχήματα, οι άβακες, τα σχήματα αναπαράστασης αλγεβρικών εξισώσεων, τα εύκαμπτα σχήματα και οι κλασματικές ράβδοι.** Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι τα παραπάνω είναι ενδεικτικά και η εκπαιδευτικός μπορεί να προσθέσει και άλλα αντικείμενα, ακόμα και πράγματα που κατασκευάζονται μέσα στην τάξη για τις ανάγκες που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μιας έννοιας ή ενότητας.

Διδασκαλία συνομηλίκων

Η **διδασκαλία συνομηλίκων** έχει αποδειχθεί πολύ αποτελεσματική στην επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων (Gagnon & Maccini, 2007˙ Winfree, 2006) και επιτρέπει στην εκπαιδευτικό να προσεγγίζει μικρές ομάδες μαθητών, που έχουν ανάγκη από επίβλεψη, όπως οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες, όταν οι άλλοι μαθητές δουλεύουν (Gagnon & Maccini, 2007).

Η **χρήση εκπαιδευτικών ομάδων**, όπως ομάδες πολλών ατόμων, μικρές ομάδες, ομάδες συνεργασίας ή ακόμα και ατομικές εργασίες (Maccini, Gagnon, Mulcah, & Leon, 2006˙ Winfree, 2006) είναι επίσης μια αποτελεσματική σε αρκετές περιπτώσεις τεχνική.

Η ένταξη των **αριθμομηχανών** στο καθημερινό μάθημα, με σαφείς οδηγίες για τη χρήση τους, αλλά και η δυνατότητα εξάσκησης για την απόκτηση δεξιοτήτων στη χρήση τους από τους μαθητές, η χρήση της τεχνολογίας αλλά και η σύνδεση των μαθημάτων με καταστάσεις της καθημερινής ζωής, μπορούν να βοηθήσουν το μαθητή με Μαθησιακές Δυσκολίες να κατανοήσει τις μαθηματικές έννοιες, αλλά και να γενικεύσει τις γνώσεις του σε εφαρμογές πέρα από τα όρια της τάξης (Maccini, Gagnon, Mulcah, & Leon, 2006˙ Winfree, 2006).

Η εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει επίσης **οργανογράμματα προόδου και γνωστικούς χάρτες** για να βοηθηθούν οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες να προσανατολιστούν στην ενότητα που διδάσκεται, αλλά και να συνδέσουν την ενότητα αυτή με τα δικά τους ενδιαφέροντα, αλλά και τις προηγούμενες γνώσεις τους (Maccini, Gagnon, Mulcah, & Leon, 2006˙ Ives & Hoy, 2003˙ Ives, 2007). Αποτελεσματική είναι και η χρήση οδηγιών και στρατηγικών, όπως είναι οι **μνημονικοί κανόνες**, για την υπενθύμιση και επανάκληση αλγορίθμων (Dolan, Murray, & Strangman, 2006˙ Winfree, 2006)

Τέλος, αποτελεσματική τεχνική στην επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων, αλλά και γενικά στην επίλυση προβλημάτων είναι και ο αυτό-έλεγχος (Gagnon & Maccini, 2007), όταν βέβαια αυτό είναι δυνατό να επιτευχθεί μετά από καθοδήγηση από την εκπαιδευτικό και κατάλληλη εξάσκηση, από τον ίδιο το μαθητή. Η διδασκαλία τεχνικών αυτο-ελέγχου για την ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων θα βοηθήσει το μαθητή με Μαθησιακές Δυσκολίες τόσο κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας νέων εννοιών, όσο και κατά την επίλυση προβλημάτων (Maccini, Gagnon, Mulcah, & Leon, 2006˙ Witzel, Smith, & Browuell, 2004).

Επίλυση προβλημάτων και μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες

Η επίλυση προβλημάτων απαιτεί την επιλογή και χρήση της προηγούμενης γνώσης με συστηματικό και οργανωμένο τρόπο. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να πάρουν σωστά τις πληροφορίες από το πρόβλημα. Πρέπει να μπορούν να απομονώνουν τις λέξεις κλειδιά, να απορρίπτουν τις άχρηστες πληροφορίες ή να διαπιστώνουν την έλλειψη σημαντικών πληροφοριών (Jarrett, 1999). Πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν τις ομοιότητες των προβλημάτων με άλλα του ίδιου είδους, έτσι ώστε να επιλέξουν την κατάλληλη διαδικασία επίλυσης και οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία σε αυτή την κατηγοριοποίηση (Παντελιάδου & Πατσιοδήμου στο Παντελιάδου & Μπότσας, 2007).

Για να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τη λογική σκέψη και ικανότητες επίλυσης προβλημάτων, η εκπαιδευτικός θα πρέπει να σχεδιάζει τη διδασκαλία της με βάση τις μεγάλες ιδέες ή τις κεντρικές μαθηματικές έννοιες που θα τους βοηθήσουν να κατανοήσουν της υποκατηγορίες των διάφορων θεμάτων (Jarrett, 1999˙ Rivera, 2004)

Κατασκευή σχήματος

Η τεχνική της **κατασκευής σχήματος-σχεδιαγράμματος** (Dolan, Murray, & Strangman, 2006˙ Fuchs, & Fuchs, 2005) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν βάση για την κατανόηση της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Αυτή η θεωρία αναφέρει ότι για να κατακτήσουν την επίλυση προβλημάτων οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να αναπτύξουν ένα σχεδιάγραμμα όπου θα κατηγοριοποιούν τα προβλήματα ανάλογα με τον τρόπο επίλυσης που χρειάζονται. Όσο πιο αναπτυγμένο είναι το σχεδιάγραμμα τόσο πιο πολλές πιθανότητες έχει ο μαθητής να αναγνωρίσει το πρόβλημα και να βρει τον κατάλληλο τρόπο επίλυσής του. Όμως είναι πολύ δύσκολο από έναν μαθητή με Μαθησιακές Δυσκολίες να αναπτύξει αυτό το σχεδιάγραμμα μόνος του. Για αυτό η εκπαιδευτικός θα πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζει τις ανάγκες του μαθητή και να τον βοηθά δίνοντας του ρητές οδηγίες για την κατασκευή του κατάλληλου σχήματος, κατευθυνόμενες οδηγίες για την κατηγοριοποίηση των προβλημάτων, αλλά και διδάσκοντας του τεχνικές για να αποκτήσει δεξιότητες αυτο-ελέγχου, έτσι ώστε να είναι σε θέση να επιλύει προβλήματα χωρίς εξωτερική βοήθεια (Gagnon & Maccini, 2007˙ Dolan, Murray, & Strangman, 2006˙ Fuchs & Fuchs, 2005˙ Rivera, 2004).

Η **διδασκαλία σε μικρές ομάδες** είναι επίσης πολύ αποτελεσματική, αφού δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή με Μαθησιακές Δυσκολίες να ξεπεράσει τα σημεία που τον δυσκολεύουν και να εστιάσει στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος (Gagnon & Maccini, 2007).

Άλλες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων που έχουν μελετηθεί από διάφορους ερευνητές (Dolan, Murray, & Strangman, 2006˙ Fuchs & Fuchs, 2005˙ Jarrett, 1999˙ Rivera, 2004) και μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά με Μαθησιακές Δυσκολίες είναι οι παρακάτω:

- **Δουλεύοντας ανάποδα**: με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες δεν αποπροσανατολίζονται ή δεν χάνουν τον στόχο τους δουλεύοντας από το γενικό στο ειδικό.
- **Απλοποιώντας και αφαιρώντας**: οι μεγάλοι αριθμοί πολλές φορές αποσπούν την προσοχή των μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες, αλλά αν μειώσουμε το μέγεθος ή στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό, τότε ίσως τους βοηθήσουμε να εντοπίσουν τη διαδικασία επίλυσης και να κάνουν μια εκτίμηση του αποτελέσματος.
- **Αναγνωρίζοντας μοτίβα με αριθμούς λέξεις ή σχήματα**: τα μοτίβα μπορούν να βρεθούν και στα ίχνη των ζώων ή ακόμα και των ανθρώπων, σε γεωλογικούς σχηματισμούς, στη διάταξη των νεφών και σε άλλα θέματα της καθημερινής

ζωής, έτσι η εκπαιδευτικός μπορεί να κινήσει το ενδιαφέρον τον μαθητών συνδέοντας τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο.

- **Σχεδιάζοντας μοντέλα**: σχεδιάζοντας μια εικόνα ή ένα μοντέλο του προβλήματος ο μαθητής μπορεί να δει οπτικά πλέον την κατάσταση, να εξηγήσει σύνθετες σχέσεις, να απεικονίσει αυτές τις σχέσεις και να χρησιμοποιήσει πιο απτά δεδομένα.
- **Πίνακες και γραφήματα**: με αυτή την τεχνική οι μαθητές μαθαίνουν να οργανώνουν τα δεδομένα επιλέγοντας κατηγορίες που να σχετίζονται με το πρόβλημα και τοποθετώντας τα δεδομένα κάτω από αυτές. Επίσης ο πίνακας ή το γράφημα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την κατάταξη των δεδομένων σε σειρά.
- **Βιωματική προσέγγιση και χρήση αντικειμένων**: η χρήση αντικειμένων, αλλά και η ενεργή συμμετοχή των μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες στην αναπαράσταση και επίλυση του προβλήματος, τους βοηθά στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης, την ανάπτυξη ικανοτήτων αναπαράστασης μιας κατάστασης με διάφορους τρόπους και στην ανάπτυξη ικανοτήτων αναγνώρισης σχετικών και άσχετων με την συγκεκριμένη κατάσταση πληροφοριών.
- **Αριθμομηχανές και Η/Υ**: με τη χρήση αριθμομηχανών και Η/Υ οι μαθητές ελευθερώνονται από τους απλούς υπολογισμούς και τους δίνεται η δυνατότητα να εξερευνήσουν μαθηματικά ανώτερου επιπέδου, να οπτικοποιήσουν τα μαθηματικά δεδομένα, να συγκρίνουν τα αποτελέσματα από διαφορετικά προβλήματα και να επαναπροσδιορίσουν τις διαδικασίες επίλυσης.

Εφαρμόζοντας οποιεσδήποτε από τις παραπάνω τεχνικές η εκπαιδευτικός θα πρέπει να ακολουθεί τη σκέψη του μαθητή και να τη σπάει σε μικρά κομμάτια, έτσι ώστε να κατανοήσει τι καταλαβαίνει ο μαθητής, τι όχι και που ακριβώς έχει χάσει το δρόμο (Jarrett, 1999˙ Rivera, 2004).

Εφαρμογή

Πρωτοβάθμια εκπαίδευση

Β’ τάξη δημοτικού, τεύχος β’, Ενότητα 24, σελ. 66-67

Πριν οι μαθητές προσπαθήσουν να λύσουν το «πρόβλημα-ανακάλυψη», κρίνεται σκόπιμο να συνδεθεί η ενότητα 24 «Βρίσκω την προπαίδεια του 10 και του 5» με την ενότητα 18 «Φτιάχνω διψήφιους αριθμούς με πρόσθεση ίδιων αριθμών». Με αυτόν τον τρόπο *ελέγχουμε την κατάκτηση προαπαιτούμενων δεξιοτήτων και συνδέουμε τη νέα γνώση με την προηγούμενη*. Αφού γίνει αναφορά στο παιχνίδι «κρυφτό» κατά το οποίο μπορούμε να φτάσουμε στο 100 απαριθμώντας είτε 10-10 είτε 5-5, μπορούμε να συνεχίσουμε με προφορική εξάσκηση στο ανέβασμα και κατέβασμα από το 0-100 ανά 10 και ανά 5. Η δραστηριότητα γίνεται αρχικά σε ολόκληρη την τάξη που μιλά «εν χορώ», ώστε ο μαθητής με Μαθησιακές Δυσκολίες να μην φοβηθεί τυχόν λάθη που μπορεί να κάνει και στη συνέχεια ανεβαίνουν και κατεβαίνουν οι μαθητές τη «σκάλα» του 100 ατομικά (όπου θα απαντήσει και ο μαθητής με ΜΔ μόνος του).

Σύμφωνα με την προηγούμενη επίδοση του μαθητή με ΜΔ, αν δυσκολεύεται να δημιουργήσει αριθμητικές αλυσίδες με κριτήριο το διπλάσιο (2, 4, 8, 16), θα πρέπει να τροποποιήσουμε τη «δραστηριότητα-ανακάλυψη», αλλάζοντας τις τιμές των αντικειμένων προς πώληση. Αντί να πουληθούν 4 χελώνες των 4 ευρώ, 8 πεταλούδες των 5 ευρώ και 11 ψαράκια των 2 ευρώ, θα πουληθούν 4 χελώνες των 10 ευρώ, 5 πεταλούδες των 5 ευρώ και 11 ψάρια των 5 ευρώ. Με αυτό τον τρόπο η δραστηριότητα γίνεται απλούστερη, ενώ εξακολουθεί να υπάρχει η περίπτωση που δείχνει ότι η προπαίδεια δε σταματά στο 10 (11 x 5).

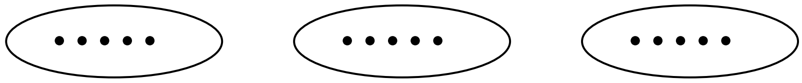
Κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος *τα παιδιά ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν ποικίλες στρατηγικές* ή βοήθειες όπως η μέτρηση με τα δάχτυλα, η χρήση αριθμογραμμών, η ζωγραφική ή τα πινακάκια. Δεν επιμένουμε στο μαθητή με Μαθησιακές Δυσκολίες να χρησιμοποιεί όλους τους τρόπους εύρεσης των γινομένων, παρά μόνο εκείνους που τον βολεύουν και παρατηρούμε ποιοι είναι αυτοί. Επίσης αν ο μαθητής δε γνωρίζει τις προτεραιότητες των πράξεων μέσα στις παρενθέσεις (είναι πιθανό να μην τον έχει κατακτήσει αν και είχε δοθεί σε προηγούμενη ενότητα), δεν θα προσθέσουμε έναν ακόμη διδακτικό στόχο στο μάθημα και ο υπολογισμός της Άννας (σελ. 66) μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο με ζωγραφική χωρίς να σημειώσουμε υπολογισμούς και αριθμητικές παραστάσεις που περιέχουν παρενθέσεις.

Στη συνέχεια, πριν περάσουμε στην πρώτη άσκηση του βιβλίου (σελ. 67), δίνουμε στο μαθητή με Μαθησιακές Δυσκολίες να συμπληρώσει αριθμητικές αλυσίδες, όπως αυτές που αναφέρονται στη 18^{η} ενότητα (σελ. 50).

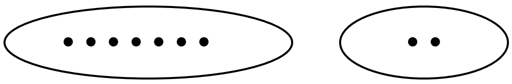
0,10, 20, 30, ………..	Βάζω …… κάθε φορά.
100, 90, 80………….	Βγάζω …...κάθε φορά.
0, 5, 10, 15, ………...	Βάζω …… κάθε φορά.
100, 95, 90, ………	Βγάζω …... κάθε φορά.

Αμέσως μετά προχωρούμε στην άσκηση 1 του βιβλίου (σελ. 67), όπου οι μαθητές με τη βοήθεια του πίνακα, των δακτύλων και της *αριθμογραμμής* βρίσκουν την προπαίδεια του 10. Πριν προχωρήσουμε στην ίδια άσκηση για την προπαίδεια του 5, δίνουμε μια παρόμοια άσκηση στην οποία ο πίνακας και η αριθμογραμμή δίνονται όχι οριζόντια, αλλά *κάθετα* με τη χρήση και την απεικόνιση του *άβακα* (Λεμονίδης, 2007, σελ. 37).

Επιπρόσθετα, μπορούμε να δώσουμε ασκήσεις εύρεσης της αξίας των χρημάτων (10 λεπτά και 10 ευρώ) που δίνονται σε εικόνες, καλλιεργώντας τον *γρήγορο υπολογισμό* με τη χρήση της προπαίδειας, έναντι του μηχανισμού της πρόσθεσης (Λεμονίδης, 2007, σελ. 38). Επίσης οι μαθητές μπορούν να λύσουν / απαντήσουν σε εύκολα λεκτικά προβλήματα όπως αυτά που προτείνονται στις εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις του βιβλίου του δασκάλου (σελ. 100) του τύπου «Πόσα δάχτυλα έχουν στα χέρια τους 5 παιδιά;». Κατά την επίλυση προβλημάτων ζητούμε από το μαθητή να *παραφράσει* και να *οπτικοποιήσει* το πρόβλημα με ζωγραφική για να ελέγξουμε αν κατανοεί τι αντιπροσωπεύει ο καθένας από τους δύο παράγοντες που παρουσιάζονται (ο ένας την ποσότητα και ο άλλος την επανάληψη αυτής της ποσότητας). Επίσης, μπορούμε να οπτικοποιήσουμε εμείς κάποια προβλήματα και να ζητήσουμε από το μαθητή να επιλέξει τη σωστή επίλυση (Bley & Thorton, 1995, σελ. 64).



3	3	5	5
x 5	+ 5	x 3	+ 3



7	7
x 2	+ 2

Αργότερα, ακολουθούμε ασκήσεις παρόμοιου τύπου για την προπαίδεια του 5 και ζητούμε από τους μαθητές να κάνουν συσχετισμούς μεταξύ των πινάκων του πολλαπλασιασμού για να καταλήξουμε στην εύρεση αποτελεσμάτων αξιοποιώντας τη σχέση μισού-διπλάσιου. Αν ο μαθητής στις προηγούμενες ενότητες για τα αριθμητικά μοτίβα είχε αναπτύξει τις ανάλογες δεξιότητες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε *εποπτικό υλικό* όπως κορδόνια και χρωματιστές χάντρες δύο ειδών και να κάνουμε ανάλογες δραστηριότητες που θα βοηθήσουν στην κατανόηση της στρατηγικής.

Τέλος, για να περάσουμε στην αντιμεταθετική ιδιότητα που είναι και ο τελευταίος στόχος της ενότητας, μέσα από την *επίλυση προβλημάτων* και το *χειρισμό υλικών αντικειμένων* (ξυλάκια, χάντρες, όσπρια κτλ.), οι μαθητές καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το ίδιος πλήθος αντικειμένων μπορεί να αναπαρασταθεί τουλάχιστον με δυο διαφορετικούς τρόπους (πχ. το 15 είτε ως 5 τριάδες είτε ως τρεις πεντάδες). Στη συνέχεια συνδέουμε αυτήν την «ανακάλυψη» με τη συμβολική πράξη του πολλαπλασιασμού και την αντιμεταθετική ιδιότητα και μετά περνάμε στις ασκήσεις του βιβλίου μαθητή και του τεύχους εργασιών.

Δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Α’ τάξη γυμνασίου, τεύχος α’, Κεφάλαιο 4, Ενότητα 4.2, σελ. 75-78

Πριν προχωρήσει στη διδασκαλία της ενότητας 4.2 «επίλυση προβλημάτων» από το $4^{ο}$ κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου για την Α’ γυμνασίου η εκπαιδευτικός θα πρέπει να βεβαιωθεί ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει τις έννοιες τις μεταβλητής και της εξίσωσης πρώτου βαθμού. Αν το κρίνει απαραίτητο θα πρέπει να κάνει επανάληψη με μια εισαγωγική δραστηριότητα, όπως η δραστηριότητα με τη ζυγαριά στη σελίδα 72 της ενότητας 4.1 «η έννοια της εξίσωσης». Μπορεί επίσης να χρησιμοποιήσει και πραγματικά υλικά όπως μια ζυγαριά από το εργαστήριο του σχολείου και πραγματικές σοκολάτες, για να δώσει στους μαθητές τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν αντικείμενα, κάτι που πολλοί ερευνητές (Dolan και συν., 2006˙ Fuchs & Fuchs, 2005˙ Jannett, 1999˙ Rivera, 2004) υποστηρίζουν ότι βοηθά ιδιαίτερα τους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες.

Θα είχε ακόμα ενδιαφέρον, πριν ξεκινήσει η εκπαιδευτικός τη διδασκαλία τεχνικών επίλυσης προβλημάτων, να ετοιμάσει μια μικρή παράσταση για την εισαγωγή σε αυτό το δύσκολο κομμάτι των μαθηματικών, αφήνοντας τους μαθητές να επιλέξουν μια προβληματική κατάσταση, όπως τα οικονομικά προβλήματα μιας οικογένειας ή η έρευνα αγοράς για την αγορά ενός νέου κινητού τηλεφώνου. Στη διάρκεια της μικρής αυτής παράστασης η εκπαιδευτικός θα ζητήσει από τους μαθητές να παρουσιάσουν τις προτάσεις τους σε μικρές ομάδες για την εύρεση λύσης στο πρόβλημα, με ή ακόμα και χωρίς τη βοήθεια των μαθηματικών. Ο στόχος αυτής της δραστηριότητας είναι να βοηθήσει τους μαθητές κυρίως στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης, την ανάπτυξη ικανοτήτων αναπαράστασης μιας κατάστασης με διάφορους τρόπους και στην ανάπτυξη ικανοτήτων αναγνώρισης σχετικών και άσχετων με την συγκεκριμένη κατάσταση πληροφοριών (Jannett, 1999). Η επιλογή των μικρών ομάδων θα διευκολύνει το μαθητή να εκφράσει τις απόψεις του χωρίς να αισθάνεται αμήχανα μπροστά στο σύνολο της τάξης, αλλά και να εστιάσει στην επίλυση του προβλήματος, ξεπερνώντας τα σημεία που τον δυσκολεύουν.

Πριν περάσει η εκπαιδευτικός στη δραστηριότητα του σχολικού βιβλίου θα πρέπει να επιβεβαιώσει ότι ο μαθητής με Μαθησιακές Δυσκολίες έχει κατανοήσει την έννοια του κλάσματος και έχει αρκετή ευχέρεια στις πράξεις με κλάσματα. Αν διαπιστώσει πως αυτό δεν ισχύει θα πρέπει να επιλέξει μια πιο απλή δραστηριότητα (Jannett, 1999) με ακέραιους αριθμούς, έτσι ώστε να βοηθήσει το μαθητή να εντοπίσει τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος απελευθερώνοντάς τον από έννοιες που τον μπερδεύουν. Μια εναλλακτική δραστηριότητα που μπορεί να δοθεί εδώ είναι το $2^{ο}$ πρόβλημα ή η δραστηριότητα στη σελίδα 23 από το κεφάλαιο 26 του β’ τεύχους του τετραδίου εργασιών των μαθηματικών για την ΣΤ’ δημοτικού.

Στο παράδειγμα της αντίστροφης διαδικασίας, δηλαδή της κατασκευής προβλήματος από μια συγκεκριμένη εξίσωση, αν ο μαθητής με Μαθησιακές

Δυσκολίες αντιμετωπίσει προβλήματα ή εκπαιδευτικός δεν πρέπει να επιμείνει, δίνοντας στο μαθητή τη δυνατότητα να επεξεργαστεί την επίλυση προβλημάτων με τρόπους που είναι πιο κατανοητοί από τον ίδιο.

Τέλος με την επίλυση επιπλέον προβλημάτων, όπως είναι οι εφαρμογές και οι ασκήσεις/προβλήματα στις σελίδες 76-78 του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών για την Α' γυμνασίου, αλλά και επιπλέον ασκήσεων, που θα δώσει η εκπαιδευτικός στο μαθητή με Μαθησιακές Δυσκολίες, μπορεί εκείνος με τη βοήθεια της εκπαιδευτικού να φτιάξει έναν γνωστικό χάρτη (Dolan και συν., 2006˙ Fuchs & Fuchs, 2005). Ο γνωστικός αυτός χάρτης μπορεί να έχει σαν βάση τον πίνακα ανακεφαλαίωσης, που υπάρχει στο τέλος της ενότητας 4.2 «επίλυση προβλημάτων» του σχολικού βιβλίου συμπληρωμένο ίσως, με λέξεις κλειδιά, που θα κατευθύνουν το μαθητή στην επιλογή της κατάλληλης εξίσωσης, ή ακόμα και μνημονικών κανόνων για την εύκολη ανάκληση από το μαθητή διάφορων τεχνικών για την επίλυση προβλημάτων.